SET-2

Series GBM

कोड नं.
Code No. 65/2

रोल नं.
Roll No. | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **12** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **12** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न पत्र में* ***29*** *प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में* ***4*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***एक अंक*** *का है । खण्ड ब में* ***8*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***दो अंक*** *का है । खण्ड स में* ***11*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***चार अंक*** *का है । खण्ड द में* ***6*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***छः अंक*** *का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 3 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 3 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति* ***नहीं*** *है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of* ***29*** *questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of* ***4*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***8*** *questions of* ***two marks*** *each, Section C comprises of* ***11*** *questions of* ***four marks*** *each and Section D comprises of* ***6*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 3 questions of four marks each and 3 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 4 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 4 carry 1 mark each.

1. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} \, dx$$

Find :

$$\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x} \, dx$$

2. समतलों $2x - y + 2z = 5$ तथा $5x - 2{\cdot}5y + 5z = 20$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the distance between the planes $2x - y + 2z = 5$ and $5x - 2{\cdot}5y + 5z = 20$.

3. यदि किसी 2×2 वर्ग आव्यूह A के लिए, $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ है, तो $|A|$ का मान लिखिए ।

If for any 2×2 square matrix A, $A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, then write the value of $|A|$.

4. 'k' का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निम्नलिखित फलन $x = 3$ पर संतत है :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+3)^2 - 36}{x-3} & , \quad x \neq 3 \\ k & , \quad x = 3 \end{cases}$$

Determine the value of 'k' for which the following function is continuous at $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+3)^2 - 36}{x-3} & , \quad x \neq 3 \\ k & , \quad x = 3 \end{cases}$$

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 5 से 12 तक प्रत्येक प्रश्न के 2 अंक हैं ।

Question numbers 5 to 12 carry 2 marks each.

5. एक पासा, जिसके फलकों पर अंक 1, 2, 3 लाल रंग में लिखे हैं तथा 4, 5, 6 हरे रंग में लिखे हैं, को उछाला गया । माना घटना A है : "प्राप्त संख्या सम है" तथा घटना B है : "प्राप्त संख्या लाल है" । ज्ञात कीजिए कि क्या A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं ।

A die, whose faces are marked 1, 2, 3 in red and 4, 5, 6 in green, is tossed. Let A be the event "number obtained is even" and B be the event "number obtained is red". Find if A and B are independent events.

6. दो दर्ज़ी, A तथा B, प्रतिदिन क्रमशः ₹ 300 तथा ₹ 400 कमाते हैं । A एक दिन में 6 कमीज़ें तथा 4 पैंटें सिल सकता है जबकि B प्रतिदिन 10 कमीज़ें तथा 4 पैंटें सिल सकता है । यह ज्ञात करने के लिए कि कम-से-कम 60 कमीज़ें तथा 32 पैंटें सिलने के लिए प्रत्येक कितने दिन कार्य करे कि श्रम लागत कम-से-कम हो, रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए ।

Two tailors, A and B, earn ₹ 300 and ₹ 400 per day respectively. A can stitch 6 shirts and 4 pairs of trousers while B can stitch 10 shirts and 4 pairs of trousers per day. To find how many days should each of them work and if it is desired to produce at least 60 shirts and 32 pairs of trousers at a minimum labour cost, formulate this as an LPP.

7. बिंदुओं P(2, 2, 1) तथा Q(5, 1, – 2) को मिलाने वाली रेखा पर स्थित एक बिंदु का x-निर्देशांक 4 है । उसका z-निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

The x-coordinate of a point on the line joining the points P(2, 2, 1) and Q(5, 1, – 2) is 4. Find its z-coordinate.

8. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{dx}{5 - 8x - x^2}$$

Find :

$$\int \frac{dx}{5 - 8x - x^2}$$

9. यदि A कोटि 3 का एक विषम-सममित आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि det A = 0.

If A is a skew-symmetric matrix of order 3, then prove that det A = 0.

10. फलन $f(x) = x^3 - 3x$, $[-\sqrt{3}, 0]$ के लिए रोले के प्रमेय के प्रयोग से c का मान ज्ञात कीजिए ।

Find the value of c in Rolle's theorem for the function $f(x) = x^3 - 3x$ in $[-\sqrt{3}, 0]$.

11. दर्शाइए कि फलन $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$, $\mathbb{R}$ पर वर्धमान है ।

Show that the function $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$ is increasing on $\mathbb{R}$.

12. एक आयत की लंबाई x, 5 सेमी/मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 4 सेमी/मिनट की दर से बढ़ रही है । जब x = 8 सेमी और y = 6 सेमी है, तो आयत के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए ।

The length x, of a rectangle is decreasing at the rate of 5 cm/minute and the width y, is increasing at the rate of 4 cm/minute. When x = 8 cm and y = 6 cm, find the rate of change of the area of the rectangle.

खण्ड स
SECTION C

प्रश्न संख्या 13 से 23 तक प्रत्येक प्रश्न के 4 अंक हैं ।

Question numbers 13 to 23 carry 4 marks each.

13. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{1}^{4} \{|x-1| + |x-2| + |x-4|\} \, dx$$

Evaluate :

$$\int_{0}^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

OR

Evaluate :

$$\int_{1}^{4} \{|x-1| + |x-2| + |x-4|\} \, dx$$

14. दर्शाइए कि बिंदु A, B, C जिनके स्थिति सदिश क्रमश: $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ हैं, एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं । अत: त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Show that the points A, B, C with position vectors $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ and $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ respectively, are the vertices of a right-angled triangle. Hence find the area of the triangle.

15. 4 कार्ड हैं जिन पर संख्याएँ 1, 3, 5 तथा 7 अंकित हैं, एक कार्ड पर एक संख्या । दो कार्ड प्रतिस्थापना किए बिना यादृच्छया निकाले गए । माना X निकाले गए दो कार्डों पर लिखी संख्याओं का योगफल है । X का माध्य तथा प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

There are 4 cards numbered 1, 3, 5 and 7, one number on one card. Two cards are drawn at random without replacement. Let X denote the sum of the numbers on the two drawn cards. Find the mean and variance of X.

16. एक विद्यालय के विद्यार्थियों के लिए ज्ञात है कि 30% विद्यार्थियों की 100% उपस्थिति है तथा 70% विद्यार्थी अनियमित हैं । पिछले वर्ष के परिणाम सूचित करते हैं कि उन सभी विद्यार्थियों, जिनकी उपस्थिति 100% है, में से 70% ने वार्षिक परीक्षा में A ग्रेड पाया तथा अनियमित विद्यार्थियों में से 10% ने A ग्रेड पाया । वर्ष के अंत में, विद्यालय में से एक विद्यार्थी यादृच्छया चुना गया तथा यह पाया गया कि उसका A ग्रेड था । प्रायिकता क्या है कि उस विद्यार्थी की 100% उपस्थिति है ? क्या नियमितता केवल विद्यालय में आवश्यक है ? अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिए ।

Of the students in a school, it is known that 30% have 100% attendance and 70% students are irregular. Previous year results report that 70% of all students who have 100% attendance attain A grade and 10% irregular students attain A grade in their annual examination. At the end of the year, one student is chosen at random from the school and he was found to have an A grade. What is the probability that the student has 100% attendance ? Is regularity required only in school ? Justify your answer.

17. यदि $\tan^{-1}\dfrac{x-3}{x-4} + \tan^{-1}\dfrac{x+3}{x+4} = \dfrac{\pi}{4}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\tan^{-1}\dfrac{x-3}{x-4} + \tan^{-1}\dfrac{x+3}{x+4} = \dfrac{\pi}{4}$, then find the value of x.

18. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर, सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^3$$

अथवा

आव्यूह A ज्ञात कीजिए कि

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

Using properties of determinants, prove that

$$\begin{vmatrix} a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (a - 1)^3$$

OR

Find matrix A such that

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

19. यदि $x^y + y^x = a^b$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $e^y(x + 1) = 1$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

If $x^y + y^x = a^b$, then find $\frac{dy}{dx}$.

OR

If $e^y(x + 1) = 1$, then show that $\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$.

20. ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{(4 + \cos^2\theta)(2 - \sin^2\theta)}$$

Find :

$$\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{(4 + \cos^2\theta)(2 - \sin^2\theta)}$$

21. निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या का आलेख द्वारा हल ज्ञात कीजिए :

$Z = 34x + 45y$ का अधिकतमीकरण कीजिए

निम्नलिखित अवरोधों के अंतर्गत

$$x + y \le 300$$

$$2x + 3y \le 70$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

Solve the following linear programming problem graphically :

Maximise $Z = 34x + 45y$

under the following constraints

$$x + y \le 300$$

$$2x + 3y \le 70$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0$$

22. x का वह मान ज्ञात कीजिए ताकि बिंदु A (3, 2, 1), B (4, x, 5), C (4, 2, – 2) तथा D (6, 5, – 1) समतलीय हों ।

Find the value of x such that the points A (3, 2, 1), B (4, x, 5), C (4, 2, – 2) and D (6, 5, – 1) are coplanar.

23. अवकल समीकरण $y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए ।

Find the general solution of the differential equation

$$y\,dx - (x + 2y^2)\,dy = 0.$$

खण्ड द
SECTION D

प्रश्न संख्या 24 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 24 to 29 carry 6 marks each.

24. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ बिंदुओं (3, – 4, – 5) तथा (2, – 3, 1) से होकर जाती रेखा, बिंदुओं (1, 2, 3), (4, 2, – 3) तथा (0, 4, 3) द्वारा बने समतल को काटती है ।

अथवा

एक चर समतल, जो मूल-बिंदु से 3p की अचर दूरी पर स्थित है, निर्देशांक अक्षों को A, B, C पर काटता है । दर्शाइए कि त्रिभुज ABC के केन्द्रक का बिंदुपथ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$ है ।

Find the coordinates of the point where the line through the points (3, – 4, – 5) and (2, – 3, 1), crosses the plane determined by the points (1, 2, 3), (4, 2, – 3) and (0, 4, 3).

OR

A variable plane which remains at a constant distance 3p from the origin cuts the coordinate axes at A, B, C. Show that the locus of the centroid of triangle ABC is $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$.

25. अवकल समीकरण $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि $y = 0$ जब $x = 1$ है ।

Find the particular solution of the differential equation $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + 2y)$, given that $y = 0$ when $x = 1$.

26. समाकलन विधि के प्रयोग से उस त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक A (4, 1), B (6, 6) तथा C (8, 4) हैं ।

अथवा

सरल रेखा $3x - 2y + 12 = 0$ तथा परवलय $4y = 3x^2$ के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

Using the method of integration, find the area of the triangle ABC, coordinates of whose vertices are A (4, 1), B (6, 6) and C (8, 4).

OR

Find the area enclosed between the parabola $4y = 3x^2$ and the straight line $3x - 2y + 12 = 0$.

27. $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to R - \left\{\frac{4}{3}\right\}$, जो $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$ द्वारा प्रदत्त है, पर विचार कीजिए । दर्शाइए कि f एकैकी तथा आच्छादक है । f का प्रतिलोम फलन ज्ञात कीजिए । अत: $f^{-1}(0)$ ज्ञात कीजिए तथा x ज्ञात कीजिए ताकि $f^{-1}(x) = 2$.

अथवा

माना $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ तथा $*$ A पर एक द्विआधारी संक्रिया है जो $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$ द्वारा परिभाषित है, सभी $(a, b), (c, d) \in A$ के लिए । ज्ञात कीजिए कि क्या $*$ क्रमविनिमेय तथा सहचारी है । तब, A पर $*$ के सापेक्ष

(i) A में तत्समक अवयव ज्ञात कीजिए ।

(ii) A के व्युत्क्रमणीय अवयव ज्ञात कीजिए ।

Consider $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{4}{3}\right\} \to R - \left\{\frac{4}{3}\right\}$ given by $f(x) = \frac{4x+3}{3x+4}$. Show that f is bijective. Find the inverse of f and hence find $f^{-1}(0)$ and x such that $f^{-1}(x) = 2$.

OR

Let $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ and let $*$ be a binary operation on A defined by $(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad)$ for $(a, b), (c, d) \in A$. Determine, whether $*$ is commutative and associative. Then, with respect to $*$ on A

(i) Find the identity element in A.

(ii) Find the invertible elements of A.

28. AB एक वृत्त का व्यास है तथा वृत्त पर कोई बिंदु C स्थित है । दर्शाइए कि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल अधिकतम होगा, जब यह एक समद्विबाहु त्रिभुज है ।

AB is the diameter of a circle and C is any point on the circle. Show that the area of triangle ABC is maximum, when it is an isosceles triangle.

29. यदि $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए । अत: A^{-1} के प्रयोग से समीकरण निकाय $2x - 3y + 5z = 11$, $3x + 2y - 4z = -5$, $x + y - 2z = -3$ का हल ज्ञात कीजिए ।

If $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, find A^{-1}. Hence using A^{-1} solve the system of equations $2x - 3y + 5z = 11$, $3x + 2y - 4z = -5$, $x + y - 2z = -3$.

QUESTION PAPER CODE 65/2

EXPECTED ANSWER/VALUE POINTS

SECTION A

1. $-\log|\sin 2x| + c$ OR $\log|\sec x| - \log|\sin x| + c.$ 1

2. Writing the equations as $\left.\begin{array}{l} 2x - y + 2z = 5 \\ 2x - y + 2z = 8 \end{array}\right\}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ Distance = 1 unit $\frac{1}{2}$

3. $|A| = 8.$ 1

4. $k = 12.$ 1

SECTION B

5. Event A: Number obtained is even

B: Number obtained is red.

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = P$ (getting an even red number) $= \frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}$

Since $P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq P(P \cap B)$ which is $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{2}$

$\therefore$ A and B are not independent events.

6. Let A works for x day and B for y days.

$\therefore$ L.P.P. is Minimize $C = 300x + 400y$ $\frac{1}{2}$

Subject to: $\begin{cases} 6x + 10y \geq 60 \\ 4x + 4y \geq 32 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ $1\frac{1}{2}$

7. Equation of line PQ is $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-1}{-3}$ $\quad \frac{1}{2}$

Any point on the line is $(3\lambda + 2, -\lambda + 2, -3\lambda + 1)$ $\quad \frac{1}{2}$

$3\lambda + 2 = 4 \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{3} \quad \therefore$ z coord. $= -3\left(\dfrac{2}{3}\right) + 1 = -1.$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

OR

P $(2, 2, 1)$ —— R $(4, y, z)$ —— Q $(5, 1, -2)$

Let R(4, y, z) lying on PQ divides PQ in the ratio k : 1

$$\Rightarrow 4 = \frac{5k+2}{k+1} \Rightarrow k = 2. \qquad 1$$

$$\therefore\ z = \frac{2(-2)+1(1)}{2+1} = \frac{-3}{3} = -1. \qquad 1$$

8. $$\int \frac{dx}{5-8x-x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{21})^2 - (x+4)^2} \qquad 1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{21}} \log\left|\frac{\sqrt{21}+(x+4)}{\sqrt{21}-(x+4)}\right| + C \qquad 1$$

9. Any skew symmetric matrix of order 3 is $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ $\quad 1$

$\Rightarrow \quad |A| = -a(bc) + a(bc) = 0$ $\quad 1$

OR

Since A is a skew-symmetric matrix $\quad \therefore\ A^T = -A$ $\quad \frac{1}{2}$

$\therefore \quad |A^T| = |-A| = (-1)^3.|A|$ $\quad \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad |A| = -|A|$ $\quad \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \quad 2|A| = 0$ or $|A| = 0.$ $\quad \frac{1}{2}$

10. $f(x) = x^3 - 3x$

$\therefore \quad f'(c) = 3c^2 - 3 = 0$ $\frac{1}{2}$

$\therefore \quad c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 1.$ $\frac{1}{2}$

Rejecting c = 1 as it does not belong to $(-\sqrt{3}, 0)$, $\frac{1}{2}$

we get c = –1. $\frac{1}{2}$

11. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 100$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$ $\frac{1}{2}$

$= 3[x^2 - 2x + 2] = 3[(x-1)^2 + 1]$ 1

since $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R} \ \therefore$ f(x) is increasing on $\mathbb{R}$ $\frac{1}{2}$

12. Given $\frac{dx}{dt} = -5$ cm/m., $\frac{dy}{dt} = 4$ cm/m.

$A = xy \Rightarrow \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$ 1

$= 8(4) + 6(-5) = 2$

$\therefore$ Area is increasing at the rate of 2 cm^2/minute. 1

SECTION C

13. $I = \int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\tan x}{\sec x + \tan x} dx$ 1

$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \tan x} dx = \pi \int_0^{\pi} \tan x\,(\sec x - \tan x)\,dx$

$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (\sec x \tan x - \sec^2 x + 1)\,dx$ 1

$= \frac{\pi}{2} [\sec x - \tan x + x]_0^{\pi}$ 1

$= \frac{\pi(\pi - 2)}{2}$ 1

OR

$$I = \int_1^4 \{|x-1|+|x-2|+|x-4|\}dx$$

$$= \int_1^4 (x-1)\,dx - \int_1^2 (x-2)\,dx + \int_2^4 (x-2)\,dx - \int_1^4 (x-4)\,dx \qquad 2$$

$$= \left.\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^4 - \left.\frac{(x-2)^2}{2}\right]_1^2 + \left.\frac{(x-2)^2}{2}\right]_2^4 - \left.\frac{(x-4)^2}{2}\right]_1^4 \qquad 1$$

$$= \frac{9}{2}+\frac{1}{2}+2+\frac{9}{2} = 11\frac{1}{2} \text{ or } \frac{23}{2} \qquad 1$$

14. $\overrightarrow{AB} = -\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}, \overrightarrow{BC} = 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \overrightarrow{CA} = -\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ 1

Since $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$, are not parallel vectors, and $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ $\therefore$ A, B, C form a triangle 1

Also $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$ $\therefore$ A, B, C form a right triangle 1

Area of $\Delta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2}\sqrt{210}$ 1

15. Writing

+	1	3	5	7
1	×	4	6	8
3	4	×	8	10
5	6	8	×	12
7	8	10	12	×

$\therefore$ X :	4	6	8	10	12	1
P(X) :	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	
=	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1
xP(X) :	$\frac{4}{6}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{10}{6}$	$\frac{12}{6}$	
x^2P(X) :	$\frac{16}{6}$	$\frac{36}{6}$	$\frac{128}{6}$	$\frac{100}{6}$	$\frac{144}{6}$	

$\Sigma xP(x) = \frac{48}{6} = 8 \quad \therefore \text{Mean} = 8$ 1

$\text{Variance} = \Sigma x^2P(x) - [\Sigma xP(x)]^2 = \frac{424}{6} - 64 = \frac{20}{3}$ 1

16. Let E_1: Selecting a student with 100% attendance
E_2: Selecting a student who is not regular 1

A: selected student attains A grade.

$P(E_1) = \frac{30}{100}$ and $P(E_2) = \frac{70}{100}$ $\frac{1}{2}$

$P(A/E_1) = \frac{70}{100}$ and $P(A/E_2) = \frac{10}{100}$ $\frac{1}{2}$

$$P(E_1/A) = \frac{P(E_1)\cdot P(A/E_1)}{P(E_1)\cdot P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)}$$

$$= \frac{\frac{30}{100}\times\frac{70}{100}}{\frac{30}{100}\times\frac{70}{100}+\frac{70}{100}\times\frac{10}{100}}$$

$= \frac{3}{4}$ 1

Regularity is required everywhere or any relevant value 1

17. $\tan^{-1}\frac{x-3}{x-4} + \tan^{-1}\frac{x+3}{x+4} = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\frac{x-3}{x-4}+\frac{x+3}{x+4}}{1-\frac{x-3}{x-4}\cdot\frac{x+3}{x+4}}\right) = \frac{\pi}{4}$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{2x^2-24}{-7} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{17}{2}$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{17}{2}}$ 1

18. $\Delta = \begin{vmatrix} a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ 2a+1 & a+2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

$R_1 \to R_1 - R_2$ and $R_2 \to R_2 - R_3$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2-1 & a-1 & 0 \\ 2(a-1) & a-1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$ 1+1

$$= (a-1)^2 \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$ 1

Expanding

$(a-1)^2 \cdot (a-1) = (a-1)^3.$ 1

OR

Let $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$ 1

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ a & b \\ -3a+4c & -3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$ 1

$\Rightarrow$ $2a - c = -1, \quad 2b - d = -8$

$a = 1, \quad b = -2$ 1

$-3a + 4c = 9, \quad -3b + 4d = 22$

Solving to get $a = 1, b = -2, c = 3, d = 4$

$\therefore \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 1

19. $x^y + y^x = a^b$

Let $u + v = a^b$, where $x^y = u$ and $y^x = v$.

$\therefore \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0 \qquad ...(i)$ $\frac{1}{2}$

$$y \log x = \log u \Rightarrow \frac{du}{dx} = x^y\left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$ 1

$$x \log y = \log v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right]$$ 1

Putting in (i) $x^y\left[\frac{y}{x} + \log x\frac{dy}{dx}\right] + y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right] = 0$ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y^x \log y + y \cdot x^{y-1}}{x^y \cdot \log x + x \cdot y^{x-1}}$$ 1

OR

$$e^y \cdot (x+1) = 1 \Rightarrow e^y \cdot 1 + (x+1) \cdot e^y \cdot \frac{dy}{d} = 0$$ $1\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x+1)}$$ 1

$$\frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{1}{(x+1)^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$ $1\frac{1}{2}$

20. $I = \int \frac{\sin\theta \, d\theta}{(4+\cos^2\theta)(2-\sin^2\theta)} = \int \frac{\sin\theta \, d\theta}{(4+\cos^2\theta)(1+\cos^2\theta)}$ $\frac{1}{2}$

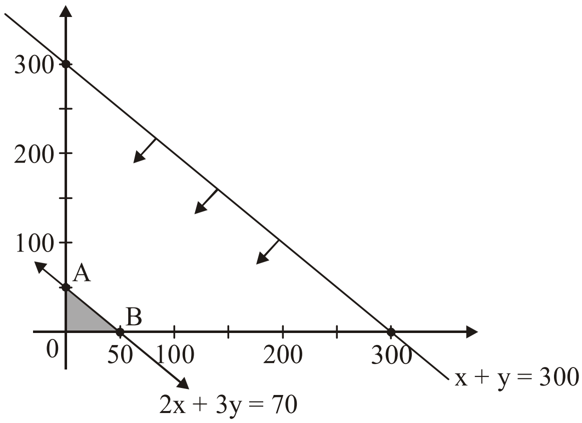
$$= -\int \frac{dt}{(4+t^2)(1+t^2)}, \text{ where } \cos\theta = t$$ 1

$$= \int \frac{1/3}{4+t^2}dt - \int \frac{1/3}{1+t^2}dt$$ 1

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{t}{2} - \frac{1}{3}\tan^{-1} t + c$$ 1

$$= \frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{2}\right) - \frac{1}{3}\tan^{-1}(\cos\theta) + c$$ $\frac{1}{2}$

21. Maximise: $z = 34x + 45y$ subject to $x + y \leq 300$, $2x + 3y \leq 70$, $x \geq 0$, $y \geq 0$



Plotting the two lines. 2

Correct shading 1

$z(A) = z\left(0, \dfrac{70}{3}\right) = 1050$

$z(B) = z(35, 0) = 1190$

$\Rightarrow$ max (1190) at $x = 35$, $y = 0$. 1

22. Points A, B, C and D are coplanar, then the vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, and $\overrightarrow{AD}$ must be coplanar.

$\overrightarrow{AB} = \hat{i} + (x-2)\hat{j} + 4\hat{k}$; $\overrightarrow{AC} = \hat{i} - 3\hat{k}$, $\overrightarrow{AD} = 3\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ $1\frac{1}{2}$

i.e., $\begin{vmatrix} 1 & x-2 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ 1

$\Rightarrow 1(9) - (x - 2)(7) + 4(3) = 0 \Rightarrow x = 5.$ $1\frac{1}{2}$

23. Given differential equation can be written as

$y\dfrac{dx}{dy} - x = 2y^2$ or $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{1}{y}\cdot x = 2y$ 1

Integrating factor is $e^{-\log y} = \dfrac{1}{y}$ 1

$\therefore$ Solution is $x \cdot \dfrac{1}{y} = \int 2\,dy = 2y + c$ 2

or $x = 2y^2 + cy$.

SECTION D

24. Equation of line through (3, – 4, – 5) and (2, –3, 1) is

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y+4}{1} = \frac{z+5}{6} \qquad \text{...(i)}$$ 1

Eqn. of plane through the three given points is

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)(12) - (y-2)(-6) + (z-3)(6) = 0$$

or $2x + y + z - 7 = 0$ ...(ii) 2

Any point on line (i) is $(-\lambda + 3, \lambda - 4, 6\lambda - 5)$ 1

If this point lies on plane, then $2(-\lambda + 3) + (\lambda - 4) + (6\lambda - 5) - 7 = 1$

$\Rightarrow \lambda = 2$ 1

Required point is (1, –2, 7) 1

OR

Equation of plane cutting intercepts (say, a, b, c) on the axes is

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, with A(a, 0, 0), B(0, b, 0) and C(0, 0, c) 1

distance of this plane from orgin is $3p = \dfrac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}}$ $1\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{9p^2} \qquad \text{...(i)}$$ 1

Centroid of ΔABC is $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right) = (x, y, z)$ 1

$\Rightarrow$ a = 3x, b = 3y, c = 3z, we get from (i) $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{9x^2} + \frac{1}{9y^2} + \frac{1}{9z^2} = \frac{1}{9p^2} \text{ or } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{p^2}$$ 1

25. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2y}{x-y} = \dfrac{1+\frac{2y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ $\qquad \frac{1}{2}$

$\dfrac{y}{x} = v \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx} \quad \therefore \; v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1+2v}{1-v}$ $\qquad \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \; x\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{1+2v-v+v^2}{v-1} \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{v-1}{v^2+v+1}dv = -\dfrac{dx}{x}$ $\qquad 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{2v+1-3}{v^2+v+1}dv = \int -\dfrac{2}{x}dx \Rightarrow \int \dfrac{2v+1}{v^2+v+1}dv - 3\int \dfrac{1}{\left(v+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dv = -\int \dfrac{2}{x}dx$ $\qquad 1+1$

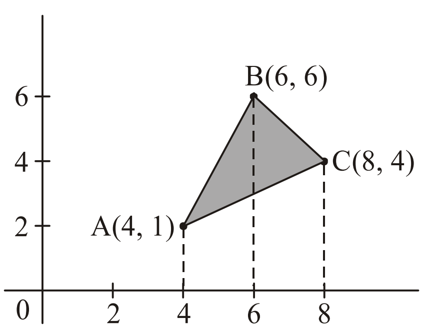
$\Rightarrow \; \log|v^2+v+1| - 3\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2v+1}{\sqrt{3}}\right) = -\log|x|^2 + c$ $\qquad 1$

$\Rightarrow \; \log|y^2+xy+x^2| - 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) = c$ $\qquad \frac{1}{2}$

$x = 1,\ y = 0 \Rightarrow c = -2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$ $\qquad \frac{1}{2}$

$\therefore \; \log|y^2+xy+x^2| - 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\dfrac{2y+x}{\sqrt{3}x}\right) + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi = 0$

26. Figure $\qquad 1$



$\left.\begin{array}{l} \text{Equation of AB} : y = \frac{5}{2}x - 9 \\ \text{Equation of BC} : y = 12 - x \\ \text{Equation of AC} : y = \frac{3}{4}x - 2 \end{array}\right\}$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

$\therefore$ Area (A) $= \displaystyle\int_4^6 \left(\frac{5}{2}x - 9\right)dx + \int_6^8 (12-x)\,dx - \int_4^8 \left(\frac{3}{4}x - 2\right)dx$ $\qquad 1$

$= \left[\dfrac{5}{4}x^2 - 9x\right]_4^6 + \left[12x - \dfrac{x^2}{2}\right]_6^8 - \left[\dfrac{3}{8}x^2 - 2x\right]_4^8$ $\qquad 1\frac{1}{2}$

$= 7 + 10 - 10 = 7$ sq.units $\qquad 1$

OR

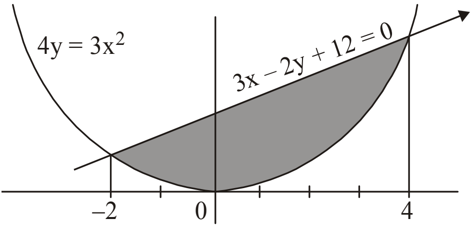


Figure 1

$$4y = 3x^2 \text{ and } 3x - 2y + 12 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{3x+12}{2}\right) = 3x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0 \text{ or } x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0$$

$\Rightarrow$ x-coordinates of points of intersection are $x = -2,\ x = 4$ 1

$$\therefore \text{ Area (A)} = \int_{-2}^{4}\left[\frac{1}{2}(3x+12) - \frac{3}{4}x^2\right]dx \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{(3x+12)^2}{6} - \frac{3}{4}\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{4} \qquad 1\frac{1}{2}$$

$$= 45 - 18 = 27 \text{ sq.units} \qquad 1$$

27. Let $x_1, x_2 \in R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$ and $f(x_1) = f(x_2)$ $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{4x_1+3}{3x_1+4} = \frac{4x_2+3}{3x_2+4} \Rightarrow (4x_1+3)(3x_2+4) = (3x_1+4)(4x_2+3)$$

$$\Rightarrow 12x_1x_2 + 16x_1 + 9x_2 + 12 = 12_1x_2 + 16x_2 + 9x_1 + 12$$

$$\Rightarrow 16(x_1 - x_2) - 9(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Hence f is a 1–1 function 2

Let $y = \frac{4x+3}{3x+4}$, for $y \in R - \left\{\frac{4}{3}\right\}$

$$3xy + 4y = 4x + 3 \Rightarrow 4x - 3xy = 4y - 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{4y-3}{4-3y} \quad \therefore \forall y \in R - \left\{\frac{4}{3}\right\}, x \in R - \left\{-\frac{4}{3}\right\}$$

Hence f is ONTO and so bijective 2

and $f^{-1}(y) = \frac{4y-3}{4-3y}; y \in R - \left\{\frac{4}{3}\right\}$ 1

$f^{-1}(0) = -\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$

and $f^{-1}(x) = 2 \Rightarrow \frac{4x-3}{4-3x} = 2$

$\Rightarrow 4x - 3 = 8 - 6x$

$\Rightarrow 10x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{10}$ $\frac{1}{2}$

OR

$(a, b) * (c, d) = (ac, b + ad); (a, b), (c, d) \in A$

$(c, d) * (a, b) = (ca, d + bc)$

Since $b + ad \neq d + bc \Rightarrow *$ is NOT comutative $1\frac{1}{2}$

for associativity, we have,

$[(a,b) * (c, d)] * (e, f) = (ac, b + ad) * (e, f) = (ace, b + ad + acf)$

$(a, b) * [(c, d) * (e, f)] = (a, b) * (ce, d + cf) = (ace, b + ad + acf)$ $1\frac{1}{2}$

$\Rightarrow *$ is associative

(i) Let (e, f) be the identity element in A

Then $(a, b) * (e, f) = (a, b) = (e, f) * (a, b)$

$\Rightarrow (ae, b + af) = (a, b) = (ae, f + be)$

$\Rightarrow e = 1, f = 0 \Rightarrow (1, 0)$ is the identity element $1\frac{1}{2}$

(ii) Let (c, d) be the inverse element for (a, b)

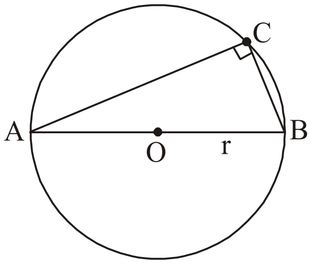
$\Rightarrow (a, b) * (c, d) = (1, 0) = (c, d) * (a, b)$

$\Rightarrow (ac, b + ad) = (1, 0) = (ac, d + bc)$

$\Rightarrow ac = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{a}$ and $b + ad = 0 \Rightarrow d = -\frac{b}{a}$ and $d + bc = 0 \Rightarrow d = -bc = -b\left(\frac{1}{a}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right)$, $a \neq 0$ is the inverse of $(a, b) \in A$ $1\frac{1}{2}$

28.



Correct Figure 1

Let the length of sides of ΔABC are, AC = x and BC = y

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4r^2$ and Area $A = \frac{1}{2}xy$ 1

$A = \frac{1}{2}x\sqrt{4r^2 - x^2}$ or $S = \frac{x^2}{4}(4r^2 - x^2)$

$S = \frac{1}{4}[4r^2x^2 - x^4]$ 1

$\therefore \frac{dS}{dx} = \frac{1}{4}[8r^2x - 4x^3]$

$\frac{dS}{dx} = 0 \Rightarrow 2r^2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}\,r$ 1

and $y = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2}\,r$ $\frac{1}{2}$

and $\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{1}{4}[8r^2 - 12x^2] = \frac{1}{4}[8r^2 - 24r^2] < 0$ 1

$\therefore$ For maximum area, x = y i.e., Δ is isosceles. $\frac{1}{2}$

29. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2(0) + 3(-2) + 5(1) = -1 \neq 0$ 1

$A_{11} = 0,\ A_{12} = 2,\ A_{13} = 1$

$A_{21} = -1$, A22 $= -9,\ A_{23} = -5$ 2

$A_{31} = 2,\ A_{32} = 23,\ A_{33} = 13$

$$\Rightarrow A^{-1} = -1\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -9 & -5 \\ 2 & 23 & 13 \end{pmatrix}^T = -1\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{pmatrix}$$ $\frac{1}{2}$

Given equations can be written as

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad AX = B$$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$ 1

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 9 & -23 \\ -1 & 5 & -13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$ $1\frac{1}{2}$